MATHÉMATIQUES I
Algèbre et analyse

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 3

N. B. — *Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible...).*

Cette épreuve est constituée d'un problème unique comprenant quatre parties largement indépendantes.

I

On considère la fonction :

$$f_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x e^{-x^2} \end{array} \right.$$

1° Étudier f_1 et tracer sa courbe représentative C_1 dans un repère orthonormé $\mathcal{R}_1$ du plan (*unité graphique :* 10 cm).

2° Soit g la restriction de f_1 à l'intervalle $I = \left[0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle K que l'on précisera.

Démontrer de même que la restriction h de f_1 à l'intervalle $J = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$ réalise une bijection de J sur un intervalle K' inclus dans K.
[On ne cherchera pas à expliciter $g^{-1}(x)$ et $h^{-1}(x)$.]

3° Dresser les tableaux de variations de g^{-1} et h^{-1}.

Construire les représentations graphiques de g^{-1} et h^{-1} dans le repère $\mathcal{R}_1$.

4° Étudier la dérivabilité des deux fonctions g^{-1} et h^{-1}. Préciser les limites de leurs dérivées aux bornes de leurs ensembles de définition.

Tournez la page S. V. P.

II

Dans cette partie, on se propose d'étudier la famille de fonctions :

$$f_\alpha \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^\alpha e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

où α désigne un paramètre *réel* strictement positif.

On note C_α la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé $\mathcal{R}_2$ du plan (*unité graphique :* 10 cm).

1° Étudier la continuité de f_α sur $\mathbb{R}_+$.

2° Déterminer, suivant la valeur de α, la demi-tangente en O à C_α.

3° Pour x strictement positif, calculer $f'_\alpha(x)$.

4° Étudier les variations de f_α.

5° Soit M_α le point de C_α d'abscisse $\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$.

Donner, sous la forme $y = m(x)$, une équation de l'ensemble Γ des points M_α quand α décrit $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de m (sens de variation, branche infinie, étude locale en zéro) et tracer Γ dans le repère $\mathcal{R}_2$.

6° Tracer $C_{\frac{1}{2}}$ et $C_{\frac{9}{2}}$ dans le repère $\mathcal{R}_2$.

III

On appelle $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, E_2 le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à deux ainsi que du polynôme nul, B la base (p_0, p_1, p_2) de E_2 avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad p_0(x) = 1,\quad p_1(x) = x,\quad p_2(x) = x^2$$

-256- ESCAE 81

On désigne par φ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = \varphi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\, e^{-t^2}\, dt$$

1° Établir, pour toute fonction f de E la continuité et la dérivabilité de $F = \varphi(f)$. Expliciter $F'(x)$ pour x réel.

2° Démontrer que φ est un endomorphisme de E.

Établir qu'il est injectif.

Est-il surjectif?

3° Soit ψ la restriction de φ à E_1.

Exprimer $\psi(p_0)$, $\psi(p_1)$ et $\psi(p_2)$ à l'aide des trois fonctions u_0, u_1 et u_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u_0(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt, \qquad u_1(x) = 1 - e^{-x^2}, \qquad u_2(x) = xe^{-x^2}$$

[On ne cherchera pas à calculer $u_0(x)$].

4° Montrer que u_0, u_1 et u_2 sont des éléments de $\psi(E_1)$ puis que $C = (u_0, u_1, u_2)$ est une base de $\psi(E_1)$.

Donner la matrice de ψ relativement aux bases B et C.

5° Déterminer une base B′ de E_1 telle que la matrice de ψ relativement aux bases B′ et C soit la matrice unité d'ordre 3.

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad k(x) = e^{-x^2}(2 - 3x) - 2$.

Résoudre dans E_1 l'équation $\psi(f) = k$ puis, dans E, l'équation $\varphi(f) = k$.

IV

On rappelle que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Tournez la page S. V. P.

1° Établir l'existence et calculer :

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\, dt$

b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ (on utilisera un changement de variable).

2° Pour tout entier naturel non nul n on note :

$$p_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

p_0 désignant toujours l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$

Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, une relation de récurrence entre $\varphi(p_{n+2})$ et $\varphi(p_n)$.

3° En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'existence et le calcul des intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} p_n(t)\, e^{-t^2}\, dt$$

puis l'expression des intégrales

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t)\, e^{-t^2}\, dt$$

-257-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail